Relatividade Geral

Uma introdução concisa às Equações de Einstein

Gabriel Pacheco Ribeiro

2022

Um matemático, assim como um pintor
ou um poeta, é um construtor de padrões.
Se seus padrões são mais permanentes, é
porque eles são feitos de ideias.

—G. H. Hardy

Contents

Um breve comentário sobre este livro

Este texto, baseado em meus estudos em Relatividade Geral (RG), tem como objetivo fazer uma apresentação concisa da teoria, introduzindo todo o mínimo teórico necessário para entender as Equações de Campo de Einstein, onde o texto é finalizado.

Decidi organizar este texto pois apesar de a RG ser uma teoria de fundamental importância para a física teórica, existem poucos textos em português sobre ela, e poucos deles são acessíveis para o aluno de graduação. Assim, neste trabalho resolvi organizar o que julgo ser o mínimo teórico para compreender a RG e suas previsões. Ele contém 35 capítulos, cada capítulo consistindo de uma ideia a ser compreendida. Estas ideias são apresentadas de forma bastante concisas, de forma que nenhum capítulo ultrapassa 4 páginas. O motivo de construir o texto dessa forma é enfatizar a importância de tópicos que poderiam se perder em um capítulo comum de várias páginas em um texto padrão.

Por fim, recomendo que você não tente aprender muitas destas ideias (capítulos) por dia, pois isto pode ser pouco produtivo. Este conselho pode ser ignorado no caso de algumas ideias que são bem curtas e não tomam mais de uma folha de texto. Espero que este texto seja de grande proveito para você, apresentando de forma sucinta porém satisfatória a teoria da relatividade geral.

Este texto, como qualquer outro, contém falhas, e eu ficaria grato que você as apontasse para mim. Meu email é gabriel.ribeiro@icen.ufpa.br. Este texto será constantemente corrigido e eventualmente expandido. As novas versões sempre estarão disponíveis em meu site pessoal.

1 Princípio da Covariância Geral

O princípio da covariância geral é uma ideia fundamental para toda a metodologia que procede o estabelecimento das equações de Einstein. Este princípio se baseia na percepção de que uma lei da física deve ser descrita de forma unívoca, isto é, que sua forma não depende do sistema de coordenadas escolhido. Isto quer dizer que a lei que descreve o movimento de uma bola deve ser a mesma em qualquer sistema de coordenadas. Tal princípio tem consequências profundas no tipo de objeto que deve ser utilizado para escrever leis da física. Veremos durante este texto que estes objetos são conhecidos como tensores.

2 Convenção de Somatório

Na teoria da relatividade, o uso de somatórios é onipresente, assim sendo, Einstein introduziu uma notação que hoje é conhecida como convenção de somatório de Einstein. Esta convenção estabelece, por exemplo, que

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{i=1}^{n} A_i B_i = A^i B_i = A^1 B_1 + A^2 B_2 + ... + A^n B_n \tag{2.1}$$

Ou seja, sempre existe um somatório implícito para todos os índices que se repetem como subscrito e sobrescrito.

Note que $A^i B_j$ não é um somatório, pois os índices são diferentes, assim, esta quantidade assume um valor para cada i e j, logo $C^i{}_j = A^i B_j$.

Em relatividade, tratamos de uma descrição quadridimensional que unifica em um mesmo sistema de coordenadas as coordenadas espaciais e a temporal. É convencionado descrever o conjunto de coordenadas de espaço-tempo com índices gregos, assim, em coordenadas cartesianas, temos que

$$x^\mu = \left\{x^0, x^1, x^2, x^3\right\} = \{ct, x, y, z\}$$

E o conjunto de coordenadas espacias é usualmente descrito por índices latinos, assim

$$x^i = \left\{x^1, x^2, x^3\right\} = \{x, y, z\}$$

Agora consideremos a seguinte expressão

$$R_\mu = A_{\mu\nu} B^\nu = A_{\mu 0} B^0 + A_{\mu 1} B^1 + A_{\mu 2} B^2 + A_{\mu 3} B^3 \tag{2.2}$$

Os índices usados nesta expressão são de dois tipos. O índice ν, que está sendo somado (ou contraído), é chamado de índice mudo, pois no processo da soma ele é eliminado da expressão. A letra que representa um índice mudo pode ser trocada por qualquer outra, já que a soma será efetuada de qualquer forma, e este índice não irá aparecer na expressão final. Isto pode ser visto considerando

$$\begin{aligned} R_\mu &= A_{\mu\nu}B^\nu + C_{\mu\rho}B^\rho \\ &= \tilde{A}_\mu + \tilde{C}_\mu \end{aligned} \tag{2.3}$$

Onde $\tilde{A}_\mu = A_{\mu\nu}B^\nu$ e $\tilde{C}_\mu = C_{\mu\rho}B^\rho$. Isto equivale a trocar $\rho \to \nu$ em $C_{\mu\rho}B^\rho$, ou seja, podemos refazer este cálculo como

$$\begin{aligned} R_\mu &= A_{\mu\nu}B^\nu + C_{\mu\rho}B^\rho \\ &= A_{\mu\nu}B^\nu + C_{\mu\nu}B^\nu \\ &= \left(A_{\mu\nu} + C_{\mu\nu}\right) B^\nu \\ &= D_{\mu\nu}B^\nu \end{aligned} \tag{2.4}$$

Onde $= D_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} + C_{\mu\nu}$.

O índice μ, que não foi somado, é o que resta na expressão. Ele é chamado de índice livre, pois o valor dele pode ser livremente escolhido pela pessoa que está fazendo o cálculo. Ao ser trocado em um termo, deve ser trocado em todos os outros termos da equação, diferentemente dos índices mudos.

3 Escalares e Campos Escalares

Em matemática, um escalar é basicamente um número. Desta forma, um campo escalar é uma distribuição de números especificada por uma regra, chamada de função. De forma geral, esta função é uma $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ou seja, é uma regra que leva um conjunto ordenado de n números em um só.

Exemplos clássicos de campos escalares na física são os campos de temperatura ou então o potencial gravitacional de Newton.

Campos de temperatura são intuitivamente conhecidos pela população por conta dos noticiários do tempo, em que é assinalado uma temperatura (escalar) a um ponto específico do mapa. Se o mapa é descrito em coordenadas cartesianas, isso quer dizer que a temperatura T em um ponto específico pode ser descrita pela regra $T = T(x, y)$.

O potencial gravitacional de Newton, usualmente denotado por ϕ, é um campo escalar essencial para descrição da gravitação newtoniana, que é definido por

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho \tag{3.1}$$

Onde ρ é a densidade de matéria.

Campos escalares tem a propriedade de não transformarem sob mudança de sistema de coordenadas. Este fato é de fácil compreensão, basta imaginar que em uma mapa, a sua cidade é descrita em coordenadas cartesianas pelo par ordenado (x_1, y_1), e a temperatura é $T(x_1, y_1)$. Em um dado momento, a temperatura é de 27ºC, portanto,

$$T(x_1, y_1) = 27^{\circ}\text{C}$$

Se ao mesmo tempo é decidido descrever a localização da sua cidade a partir de coordenadas polares, tal que as coordenadas da cidade passam a ser (r_1, θ_1), é fácil perceber que a temperatura, da sua cidade não mudou por conta da mudança dos sistemas de coordenadas, assim

$$T(r_1, \theta_1) = 27^{\circ}\text{C}$$

4 Vetores e Campos Vetoriais

Vetores são objetos um pouco mais complexos que escalares, pois carregam duas informações ao invés de apenas uma. Assim como os escalares, ele carrega uma informação escalar (número), que é sua magnitude. Porém, além desta informação, vetores também carregam informação sobre direções. Vetores são descritos em termos de vetores da base $\vec{e}_\mu$, que são como os átomos dos vetores, já que todo vetor pode ser decomposto em uma base vetorial. Assim, podemos escrever

$$\vec{A} = A^\mu \vec{e}_\mu \tag{4.1}$$

Ao A^μ chamamos de componentes escalare, e a $A^\mu \vec{e}_\mu$ específicos, chamamos de componentes vetoriais. expandindo o somatório, e considerando um vetor no espaço-tempo, a equação acima pode ser escrita como

$$\vec{A} = A^0 \vec{e}_0 + A^1 \vec{e}_1 + A^2 \vec{e}_2 + A^3 \vec{e}_3 \tag{4.2}$$

Onde $A^2 \vec{e}_2$ é a projeção do vetor $\vec{A}$ sobre a base $\vec{e}_2$ e A^2 é o comprimento desta projeção.

Perceba que descrevemos o vetor em termos de componentes A^μ, ou seja, em termos de componentes cujos índices são sobrescritos. Falamos então que estas são as componentes *contravariantes* do vetor. Podemos, por outro lado, escrever o vetor $\vec{A}$ como

$$\vec{A} = A_\mu \vec{e}^\mu \tag{4.3}$$

Neste caso, descrevemos o vetor em termos das componentes A_μ. Falamos que estas são as componentes *covariantes* do vetor.

Vetores não transformam sob mudança de sistema de coordenadas, mas suas componentes sim. Se fizermos a mudança $x^\mu \to x^{\nu'} = x^{\nu'}(x^\mu)$, então as componentes escalares do vetor $\vec{A}$ transformam como

$$A^{\nu'} = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\mu} A^\mu \tag{4.4}$$

Inversamente,

$$A^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu'}} A^{\nu'} \tag{4.5}$$

Como o vetor em sí não transforma, isto quer dizer que os vetores da base devem transformar segundo

$$\vec{e}_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\mu}} \vec{e}_{\nu'} \tag{4.6}$$

$$\vec{e}^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu'}} \vec{e}^{\nu'} \tag{4.7}$$

e inversamente,

$$\vec{e}_{\nu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu'}} \vec{e}_{\mu} \tag{4.8}$$

$$\vec{e}^{\nu'} = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\mu}} \vec{e}^{\mu} \tag{4.9}$$

Assim como o campo escalar, o campo vetorial é uma distribuição de vetores pelo espaço. De forma geral, um campo vetorial é dado por

$$\vec{V}(x^{\nu}) = V^{\mu}(x^{\nu}) \vec{e}_{\mu}(x^{\nu}) \tag{4.10}$$

Ou seja, tanto as componentes escalares quanto os vetores da base dependem das coordenadas.

5 Tensores e Campos Tensoriais

Tensores são objetos como escalares e vetores, mas que carregam uma quantidade maior de informação. Um tensor de ordem 2 é formado a partir do *produto tensorial* entre dois vetores, dado por

$$\begin{aligned} T &= (A^\mu \vec{e}_\mu) \otimes (B^\nu \vec{e}_\nu) \\ &= A^\mu B^\nu \vec{e}_\mu \otimes \vec{e}_\nu \\ &= T^{\mu\nu} \vec{e}_\mu \otimes \vec{e}_\nu \end{aligned} \tag{5.1}$$

Assim, vemos que um tensor é escrito em termos das bases, analogamente à um vetor. Dado um tensor cujas componentes escalares são $T^{\mu\nu}$, dizemos que este tensor é simétrico nestes dois índices se

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$$

e antissimétrico se

$$T^{\mu\nu} = -T^{\nu\mu}$$

Podemos formar um tensor misto de ordem $m \times n$ fazendo

$$\begin{aligned} H &= ({A_1}^{\mu_1} \vec{e}_{\mu_1}) \otimes ... \otimes ({A_m}^{\mu_m} \vec{e}_{\mu_m}) \otimes (B_{1\nu_1} \vec{e}^{\nu_1}) \otimes ... \otimes (B_{n\nu_n} \vec{e}^{\nu_n}) \\ &= ({A_1}^{\mu_1} {A_m}^{\mu_m} B_{1\nu_1} B_{n\nu_n}) \vec{e}_{\mu_1} \otimes ... \otimes \vec{e}_{\mu_m} \otimes \vec{e}^{\nu_1} \otimes ... \otimes \vec{e}^{\nu_n} \\ &= {H^{\mu_1 ... \mu_m}}_{\nu_1 ... \nu_n} \vec{e}_{\mu_1} \otimes ... \otimes \vec{e}_{\mu_m} \otimes \vec{e}^{\nu_1} \otimes ... \otimes \vec{e}^{\nu_n} \end{aligned} \tag{5.2}$$

Assim como os vetores, o tensor não muda sob mudança de coordenadas, porém, suas componentes e bases transformam. Tomemos a Eq.(5.1) como exemplo

$$T = T^{\mu\nu} \vec{e}_\mu \otimes \vec{e}_\nu = T^{\mu'\nu'} \vec{e}_{\mu'} \otimes \vec{e}_{\nu'} \tag{5.3}$$

Pelas leis de transformação dos vetores da base, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
T^{\mu\nu}\vec{e}_{\mu} \otimes \vec{e}_{\nu} &= T^{\mu'\nu'}\vec{e}_{\mu'} \otimes \vec{e}_{\nu'} \\
T^{\mu\nu}\vec{e}_{\mu} \otimes \vec{e}_{\nu} &= T^{\mu'\nu'}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\vec{e}_{\mu} \otimes \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}}\vec{e}_{\nu} \\
T^{\mu\nu}\vec{e}_{\mu} \otimes \vec{e}_{\nu} &= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}}T^{\mu'\nu'}\vec{e}_{\mu} \otimes \vec{e}_{\nu}
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

Assim

$$
T^{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}}T^{\mu'\nu'} \tag{5.5}
$$

e inversamente

$$
T^{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}}T^{\mu\nu} \tag{5.6}
$$

Logo, podemos generalizar este cálculo para um tensor misto de ordem $m \times n$ como o dado pela Eq.(5.2), deduzindo a regra geral de transformação

$$
H^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n} = \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x^{\mu'_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu_m}}{\partial x^{\mu'_m}}\frac{\partial x^{\nu'_1}}{\partial x^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu'_n}}{\partial x^{\nu_n}} H^{\mu'_1 \dots \mu'_m}{}_{\nu'_1 \dots \nu'_n} \tag{5.7}
$$

e inversamente

$$
H^{\mu'_1 \dots \mu'_m}{}_{\nu'_1 \dots \nu'_n} = \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu'_m}}{\partial x^{\mu_m}}\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu'_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_n}}{\partial x^{\nu'_n}} H^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n} \tag{5.8}
$$

Assim como vimos campos escalares e vetoriais, existem também campos tensoriais, que são regras que associam uma quantidade tensorial a cada ponto do espaço. De forma geral, um campo tensorial é dado por

$$
H(x^{\mu}) = H^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n}(x^{\mu})\vec{e}_{\mu_1}(x^{\mu}) \otimes \dots \otimes \vec{e}_{\mu_m}(x^{\mu}) \otimes \vec{e}^{\,\nu_1}(x^{\mu}) \otimes \dots \otimes \vec{e}^{\,\nu_n}(x^{\mu}) \tag{5.9}
$$

Os conceitos de escalar, vetor e tensor possuem várias semelhanças e a este ponto você já deve estar suspeitando de algo. De fato, estes três objetos possuem a propriedade de não transformarem sob mudança de coordenadas, apesar de suas componentes transformarem. Os escalares parecem ser alguma excessão à essa regra, mas isto surge do fato de eles simplesmente serem desprovidos de componentes, ou melhor, de não serem descritos em termos de uma base, portanto, qualquer desvio à regra é mera impressão.

Desta forma, todos estes objetos são tensores. O escalar, sendo o objeto mais simples, é um tensor de ordem 0. Vetores são tensores de ordem 1, e produtos tensoriais entre eles formam tensores de ordens arbitrárias. Pelas leis de transformações, deve ficar evidente que estes objetos são essenciais para uma formulação covariante – ou seja, que vale para qualquer sistema de coordenadas – de uma teoria física, pois, estabelecida uma equação entre tensores (ou suas componentes), esta equação se mantém verdadeira em qualquer sistema de coordenadas, já que ambos os lados transformam-se da mesma forma, de modo que os termos que surgem na transformação aparecem dos dois lados da equação, sendo assim cancelados.

6 Tensor Métrico

E intuitivo imaginar que sistemas de coordenadas carregam informações importantes sobre as características geométricas dos espaços que elas encobrem. Porém, para falar sobre tais características de forma precisa, precisamos sistematizar seus estudos.

Inicialmente, é necessário identificar os conceitos básicos para descrever características geométricas. Dos estudos da geometria elementar, fica claro que tais conceitos são os de ângulo e comprimento. Agora, lembre-se de que o produto escalar entre dois vetores é dado por

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \|A\| \, \|B\| \, cos\theta \tag{6.1}$$

Assim, é natural utilizar o conceito de produto escalar para estudar propriedades geométricas de um sistema de coordenadas. Definiremos o produto escalar de dois vetores da base

$$g_{\mu\nu} \equiv \vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu \tag{6.2}$$

Onde $g_{\mu\nu}$ são funções das coordenadas, pois em sistemas de coordenadas quaisquer, a base vetorial é um campo vetorial não constante, ou seja, é uma função da posição. Como

$$\vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu = \vec{e}_\nu \cdot \vec{e}_\mu$$

Seque que,

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} \tag{6.3}$$

Podemos também definir

$$g^{\mu\nu} \equiv \vec{e}^{\,\mu}\vec{e}^{\,\nu} \tag{6.4}$$

com

$$g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu} \tag{6.5}$$

As componentes mistas são definidas como

$$g^{\mu}{}_{\nu} \equiv \vec{e}^{\,\mu} \cdot \vec{e}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} \tag{6.6}$$

onde δ^{μ}_{ν} é a *delta de Kronecker*. Com todas estas definições, podemos estudar algumas propriedades interessantes de $g_{\mu\nu}$. Pela Eq. (6.2),

$$\vec{e}^{\,\mu} \cdot \vec{e}^{\,\nu} = g^{\mu\nu} = g^{\mu\sigma}\delta^{\nu}_{\sigma} = g^{\mu\sigma}\vec{e}_{\sigma} \cdot \vec{e}^{\,\nu} \tag{6.7}$$

logo,

$$\vec{e}^{\,\mu} = g^{\mu\sigma}\vec{e}_{\sigma} \tag{6.8}$$

ou seja, $g^{\mu\nu}$ tem a propriedade de levantar índices somados. Inversamente,

$$\vec{e}_{\mu} \cdot \vec{e}_{\nu} = g_{\mu\nu} = g_{\mu\sigma}\delta^{\sigma}_{\nu} = g_{\mu\sigma}\vec{e}^{\,\sigma} \cdot \vec{e}_{\nu} \tag{6.9}$$

logo,

$$\vec{e}_{\mu} = g_{\mu\sigma}\vec{e}^{\,\sigma} \tag{6.10}$$

ou seja, $g_{\mu\nu}$ tem a propriedade de abaixar índices somados. Como um vetor pode ser descrito tanto em termos de suas componentes contravariantes quanto de suas componentes covariantes, temos que

$$A^{\mu}\vec{e}_{\mu} = A_{\mu}\vec{e}^{\,\mu} \tag{6.11}$$

Tomando o produto escalar dos dois lados desta equação com $\vec{e}_{\alpha}$,

$$\begin{aligned} A^{\mu}\vec{e}_{\mu} \cdot \vec{e}_{\alpha} &= A_{\mu}\vec{e}^{\,\mu} \cdot \vec{e}_{\alpha} \\ g_{\mu\alpha}A^{\mu} &= A_{\mu}\delta^{\mu}_{\alpha} \end{aligned} \tag{6.12}$$

logo,

$$A_{\alpha} = g_{\alpha\mu}A^{\mu} \tag{6.13}$$

Assim, $g_{\mu\nu}$ nos permite calcular as componentes covariantes de um vetor a partir de suas componentes contravariantes. Se fizermos o produto escalar da equação com $\vec{e}^{\,\alpha}$

$$\begin{aligned} A^{\mu}\vec{e}_{\mu} \cdot \vec{e}^{\alpha} &= A_{\mu}\vec{e}^{\mu} \cdot \vec{e}^{\alpha} \\ g^{\mu\alpha}A_{\mu} &= A^{\mu}\delta^{\alpha}_{\mu} \end{aligned} \tag{6.14}$$

logo,

$$A^{\alpha} = g^{\alpha\mu}A_{\mu} \tag{6.15}$$

Assim, $g^{\mu\nu}$ nos permite calcular as componentes contravariantes de um vetor a partir de suas componentes covariantes.

Calculando o produto escalar entre os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, temos

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= (A^{\mu}\vec{e}_{\mu}) \cdot (B^{\nu}\vec{e}_{\nu}) \\ &= A^{\mu}B^{\nu}\vec{e}_{\mu} \cdot \vec{e}_{\nu} \\ &= g_{\mu\nu}A^{\mu}B^{\nu} \end{aligned} \tag{6.16}$$

Portanto, as funções $g_{\mu\nu}$ calculam o produto escalar de dois vetores, nos possibilitando calcular ângulos e comprimento no espaço. Assim, vemos que $g_{\mu\nu}$ possui propriedades métricas, Podemos então definir um tensor

$$g = g_{\mu\nu}\vec{e}^{\mu} \otimes \vec{e}^{\nu} = g^{\mu\nu}\vec{e}_{\mu} \otimes \vec{e}_{\nu} \tag{6.17}$$

chamado de tensor métrico. Tenso definito este objeto, batizamos $g_{\mu\nu}$ e $g^{\mu\nu}$, respectivemente, como *componentes da métrica* e *componentes da métrica inversa*.

Com as componentes da métrica, podemos definir distâncias como

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} \tag{6.18}$$

uma espécie de teorema de Pitágoras generalizado. Assim, podemos dizer que as componentes da métrica carregam a informação de como o teorema de Pitágoras transforma quando mudamos de sistema de coordenadas.

7 Cálculo Variacional

No cálculo de funções em variáveis reais estamos acostumados a estudar os valores máximos e mínimos locais ou absolutos de funções. Em uma função de uma variável, temos, pela interpretação geométrica, que num ponto de máximo ou mínimo, a reta tangente à função neste ponto deve ter inclinação nula. Logo, dada uma função $f(x)$, um ponto x_0 é um extremante se

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = 0.$$

Se $\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_0} > 0$, $f(x_0)$ é um mínimo local, e se $\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_0} < 0$, $f(x_0)$ é um máximo local. Se para todo x pertencente ao domínio de f, $f(x_0) > f(x)$, $f(x_0)$ é um máximo absoluto, se $f(x_0) < f(x)$, $f(x_0)$ é um mínimo absoluto.

Em funções de várias variáveis utilizamos de interpretações geométricas análogas, construindo objetos um pouco mais complexos, como a matriz Hessiana, a partir das derivadas parciais, para determinar valores máximos e mínimos de funções. O estudo destes valores é fundamental para cálculos de otimização. Assim sendo, podemos nos perguntar, a partir destas formulações, os valores mínimos ou máximos de diversos problemas, incluindo problemas de interesse físico.

Para iniciar o estudo de problemas de caráter físico, seria conveniente generalizar o estudo dos máximos e mínimos para que sua solução não seja mais um número, e sim uma função. Desta forma, iremos considerar a seguinte integral:

$$J(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} f\left(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), x\right) dt \tag{7.1}$$

Onde $\dot{\gamma}(t)$ é $\frac{d\gamma}{dt}$, que é a notação que usaremos a partir de agora.

O problema do cálculo variacional consiste em achar uma γ contínua na região de integração, com derivadas contínuas no mesmo intervalo, que extremize a função J, que é um novo tipo de função, chamada de *funcional*.

Como temos uma infinidade de funções $\gamma(x)$ possíveis, queremos determinar aquela que extremiza o valor de J. Para conseguir determinar esta função, tomaremos a variação do funcional J tal que

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} \delta f dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f}{\partial \gamma}\delta\gamma + \frac{\partial f}{\partial \dot{\gamma}}\delta\dot{\gamma} dt = 0 \tag{7.2}$$

Tal que as curvas γ devem satisfazer a seguinte condição de contorno

$$\delta\gamma(t_1) = \delta\gamma(t_2) = 0 \tag{7.3}$$

Consideremos a seguinte expressão

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\gamma}}\delta\gamma\right) = \frac{\partial f}{\partial \dot{\gamma}}\delta\dot{\gamma} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \gamma}\right)\delta\dot{\gamma} \tag{7.4}$$

Podemos utilizar a Eq. (7.4) para reescrever a Eq. (7.2) como

$$\begin{aligned}
\delta J &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f}{\partial \gamma}\delta\gamma - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\gamma}}\right)\delta\gamma\right) dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\gamma}}\delta\gamma\right) dt = 0 \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f}{\partial \gamma}\delta\gamma - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\gamma}}\right)\delta\gamma\right) dt - \frac{\partial f}{\partial \dot{\gamma}}\delta\gamma\Bigg|_{t_1}^{t_2} = \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f}{\partial \gamma} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\gamma}}\right)\right)\delta\gamma dt = 0
\end{aligned} \tag{7.5}$$

Para um $\delta\gamma$ qualquer integral da Eq. (7.5) só pode ser igual a zero se o termo entre parênteses for nulo. Portanto

$$\frac{\partial f}{\partial \gamma} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\gamma}}\right) = 0 \tag{7.6}$$

A Eq. (7.6) é conhecida como a *equação de Euler-Lagrange*, e para uma curva γ minimizar o funcional J, ela deve satisfazer esta equação.

8 Distância Mínima no Plano Euclidiano

A distância de dois pontos infinitesimalmente afastados, no plano euclidiano, em coordenadas cartesianas, é dado por

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \tag{8.1}$$

Se tomarmos a coordenada x como parâmetro, podemos calcular a distância como

$$\begin{aligned} S = \int_\gamma ds &= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx \end{aligned} \tag{8.2}$$

Se $f(y(x), \dot{y}(x) = \sqrt{1 + \dot{y}^2}$, então a equação de Euler-Lagrange resulta em

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}\right) = 0 \tag{8.3}$$

pois $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. A Eq. (8.3) indica que

$$\begin{aligned} \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} &= a \\ \Rightarrow \dot{y} &= \sqrt{\frac{a^2}{1 - a^2}} = \alpha \end{aligned} \tag{8.4}$$

Onde a^2 pertence aos reais e é diferente de 1. Como

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \alpha \\ \Rightarrow \int \dot{y} dx &= \int \frac{dy}{dx} dx = \int \alpha dx \end{aligned} \tag{8.5}$$

Logo,

$$y = \alpha x + c \tag{8.6}$$

Que é a equação da reta. Portanto, a curva que minimiza a distância no plano Euclidiano é a reta.

9 Extremização da Distância

De uma forma geral, distâncias são definidas como a raíz quadrada do elemento de linha ds^2.

$$ds = \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j} \tag{9.1}$$

Dada a curva $x^i = x^i(t)$, distâncias são calculadas pela integral

$$S = \int_\gamma ds = \int_{t_1}^{t2} \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt = \sqrt{g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} dt \tag{9.2}$$

A distância será extremizada para curvas que satisfazem a equação de Euler-Lagrange. Assim, sendo $\tilde{f} = \sqrt{f}$, onde $f = g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j$, então

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \dot{x}^i} = 0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{f}} \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{1}{4 f^{3/2}} \frac{df}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}^i} - \frac{1}{2\sqrt{f}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^i} \right) = 0$$

Como $\frac{df}{dt} = 0$, esta equação se reduz à

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^i} \right) = 0 \tag{9.3}$$

É conveniente não expandir o cálculo agora, pois em breve ele reaparecerá, estabelecendo uma relação entre geometria e física.

10 Mecânica Lagrangiana

Na mecânica newtoniana, temos que

$$\vec{F} = -\nabla V \tag{10.1}$$

Esta equação vetorial implica em três equações diferenciais de segunda ordem, uma para cada coordenada. Se denotarmos $x^i = \{x, y, z\}$, podemos escrever estas equações na notação indicial como

$$m\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x^i} \tag{10.2}$$

Porém, devemos lembrar que a força é a derivada temporal do momento linear, portanto

$$m\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{dp^i}{dt} \tag{10.3}$$

Onde p^i são as componentes do momento linar. Lembrando que em coordenadas cartesianas a energia cinética T é dada por

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \tag{10.4}$$

Assim,

$$p^i = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} \tag{10.5}$$

Se definirmos uma função $L = T - V$ tal que $T = T(\dot{x}^i)$ e $V = V(x^i)$, podemos, com o auxílio das Eqs. (10.3) e (10.5), reescrever a Eq. (10.2) como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) &= \frac{\partial L}{\partial x^i} \\ \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) &= 0 \end{aligned} \tag{10.6}$$

Que é um conjunto de i equações de Euler-Lagrange.

Pelo que vimos em cálculo variacional, isto indica a existência de um funcional

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \tag{10.7}$$

tal que $\delta S = 0$. A quantidade S é chamada de *ação* e $\delta S = 0$ é o princípio da míinima ação. Este princípio aponta para as leis da física como um problema de minimização. Isto quer dizer que de todas as trajetórias que uma partícula dotada de energia cinética T e sob potencial V pode percorrer, ela percorre aquela que extremiza a ação, dada pelas equações de Euler-Lagrange.

Esta equação é válida para sistemas de coordenadas quaisquer. Nesse caso, lembremos que

$$T = \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} m g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j$$

Assim,

$$L = \frac{1}{2} m g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j - V \tag{10.8}$$

11 Constantes do Movimento

Constantes do movimento são grandezas que não mudam com o passar do tempo. Elas são facilmente determináveis. Se $L = L(x^i, \dot{x}^i)$ não depende de uma coordenada x^j, a equação de Euler-Lagrange para essa coordenada resulta em

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j}\right) = 0 \tag{11.1}$$

Definimos o *momento canônico conjugado* como

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \tag{11.2}$$

Assim, a Eq. (11.1) pode ser escrita como

$$\frac{dp_j}{dt} = 0 \tag{11.3}$$

Onde o momento associado à coordenada x^j é a constante do movimento. Isto quer dizer que se uma lagrangiana não depende de uma coordenada específica de um sistema de coordenadas, o momento associado à essa coordenada é conservado.

De forma geral, uma lagrangiana pode depender explícitamente do tempo. Para o caso em que ela não depende,

$$\frac{dL}{dt} = 0 \tag{11.4}$$

Porém,

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\frac{d\dot{x}^i}{dt} \tag{11.5}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\frac{d\dot{x}^i}{dt} = 0 \\ &= \frac{\partial L}{\partial x^i}\dot{x}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\ddot{x}^i = 0 \end{aligned} \tag{11.6}$$

Considerando

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right)\dot{x}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\ddot{x}^i$$
$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\ddot{x}^i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right)\dot{x}^i \tag{11.7}$$

Podemos reescrever a Eq. (11.6) como

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\dot{x}^i\right) + \dot{x}^i\left(\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right)\right) \tag{11.8}$$

Portanto, finalmente

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\dot{x}^i - L\right) = 0 \tag{11.9}$$

Se $L = T - V$, então o termo entre parênteses da Eq. (11.9) é

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\dot{x}^i - L = 2T - (T - V) = T + V = E \tag{11.10}$$

Assim, para o caso em que L não depende explícitamente do tempo a energia total do sistema é conservada, sendo portanto uma constante do movimento, dada por

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\dot{x}^i - L \tag{11.11}$$

12 Movimento de uma Partícula Livre

Agora consideremos uma partícula livre no espaço. Neste caso, a lagrangiana terá apenas o termo cinético. Numa geometria qualquer, esta lagrangiana é dada por

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}} = \frac{1}{2}mg_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j \tag{12.1}$$

Vemos que a aplicação desta lagrangiana nas equações de Euler-Lagrange resultaram na Eq. (9.3), do problema da minimização das distâncias numa geometria qualquer. Isto quer dizer que o movimento de uma partícula livre é aquele que minimiza (ou extremiza) as distâncias no espaço. Expandindo a equação de Euler-Lagrange, temos que

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x^k}\left(g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}^k}\left(g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j\right)\right) = 0 \\
&\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j - \frac{d}{dt}\left(g_{ij}\left(\delta^i_k\dot{x}^j + \dot{x}^i\delta^j_k\right)\right) = 0 \\
&\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}\dot{x}^i\dot{x}^j - g_{kj}\ddot{x}^j - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\dot{x}^i\dot{x}^j - g_{ik}\ddot{x}^i = 0 \\
&2g_{ik}\ddot{x}^i + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\dot{x}^i\dot{x}^j + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\dot{x}^i\dot{x}^j - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0 \\
&g_{ik}\ddot{x}^i + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)\dot{x}^i\dot{x}^j = 0
\end{aligned} \tag{12.2}$$

Multiplicando a Eq. (12.2) por g^{lk}, temos que

$$\delta^l_i\ddot{x}^i + \frac{1}{2}g^{lk}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)\dot{x}^i\dot{x}^j = 0 \tag{12.3}$$

Trocando $l \to k$ e depois $k \to i$, temos, finalmente

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i{}_{kj}\dot{x}^k\dot{x}^j = 0 \tag{12.4}$$

Onde,

$$\Gamma^i{}_{kj} = \frac{1}{2} g^{il} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^l} \right) \tag{12.5}$$

São os *símbolos de Christoffel* ou *coenficientes da conexão*. A Eq. (12.4), que é a equação que simultâneamente descreve a trajetória de uma partícula livre numa geometria qualquer e que extremiza as distâncias nesta mesma geometria é denominada como a *equação da geodésica*.

13 Teoria Clássica de Campos

Podemos fazer uma generalização da mecânica lagrangiana afim de descrever estruturas mais gerais: campos. Campos são um mconceito central para a física moderna e contemporânea, de forma que todas as principais teorias são descritas por meio deles. No espaço-tempo, obtemos este formalismo escrevendo a ação em termos da integral de uma função mais complexa que a lagrangiana

$$S = \frac{1}{c}\int d^4x\sqrt{-g}\mathcal{L} \tag{13.1}$$

Onde o fator de $1/c$ surge para eliminar este múltiplo na integral, que surge pois $x^0 = ct \to dx^0 = cdt$.

A ação agora é definida, portanto, em termos de uma integral de volume no espaço tempo (4D). O termo $d^4x\sqrt{-g}$ é o invariante de volume, onde o sinal negativo dentro da raíz quadrada assegura um valor real, já que g é o determinante da métrica, que é negativo pois a métrica lorentziana que é a que descreve as teorias da relatividade especial e geral tem assinatura (-,+,+,+). Assim

$$\sqrt{-g} = \left|\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\right| \tag{13.2}$$

Ou seja, é igual ao determinante do jacobiano da transformação.

A função $\mathcal{L}$ é definida por

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\phi^i, \frac{\partial\phi^i}{\partial x^\mu}\right) \tag{13.3}$$

Onde ϕ^i sáo funções das coordenadas de espaço-tempo. Se

$$L = \int d^3x\sqrt{-g}\mathcal{L} \tag{13.4}$$

Podemos escrever a Eq, (13.1) como

$$S = \int Ldt \tag{13.5}$$

Assim, a função $\mathcal{L}$ é conhecida como *densidade de lagrangiana*. Antes, na mecânica lagrangiana, as equações de Euler-Lagrange descreviam o movimento de partículas ou sistemas de pertículas. Agora, As *equações de campo* vão descrever leis da natureza. Uma densidade de lagrangiana representa uma teoria física.

14 Equações de Campo

As equações de campo surgem do mesmo processo de variação que as equações de Euler-Lagrange no cálculo variacional. Assim

$$
\begin{aligned}
\delta S = \int d^4x\sqrt{-g}\,(\delta\mathcal{L}) \int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^i}\delta\phi^i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi^i}{\partial x^\mu}\right)}\delta\frac{\partial\phi^i}{\partial x^\mu}\right) = 0 \\
= \int d^4x\sqrt{-g}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^i}\partial\phi^i + \int d^4x\sqrt{-g}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi^i}{\partial x^\mu}\right)}\delta\frac{\partial\phi^i}{\partial x^\mu} = 0 \qquad (14.1)
\end{aligned}
$$

Onde $\delta\phi^i = o$ nas bordas da região de integração. Consideremos a seguinte expressão,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\sqrt{-g}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi^i}{\partial x^\mu}\right)}\delta\phi^i\right) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\sqrt{-g}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi^i}{\partial x^\mu}\right)}\right)\delta\phi^i \\
+\sqrt{-g}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi^i}{\partial x^\mu}\right)}\delta\frac{\partial\phi^i}{\partial x^\mu} \qquad (14.2)
\end{aligned}
$$

Assim, podemos escrever a segunda integral da Eq. (14.1) como,

$$
\begin{aligned}
\int d^4x\sqrt{-g}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi^i}{\partial x^\mu}\right)}\delta\frac{\partial\phi^i}{\partial x^\mu} = \int d^4x\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\sqrt{-g}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi^i}{\partial x^\mu}\right)}\delta\phi^i\right) \\
-\int d^4x\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\sqrt{-g}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi^i}{\partial x^\mu}\right)}\right)\delta\phi^i \qquad (14.3)
\end{aligned}
$$

A primeira integral à direita da igualdade pode ser calculada através do teorema de Gauss, pelo qual vemos que ela é nula, pois $\delta\phi^i$ é nulo nas bordas da região de integração. Assim, a Eq. (14.1) pode ser reescrita como

$$\delta S = \int d^4x \left(\sqrt{-g}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{-g}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \phi^i}{\partial x^\mu} \right)} \right) \right) \delta\phi^i = 0 \tag{14.4}$$

Esta integral é nula para uma função arbitrária $\phi^i(x^\mu)$ somente se o termo entre parênteses é nulo. Portanto, concluímos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} - \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{-g}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \phi^i}{\partial x^\mu} \right)} \right) = 0 \tag{14.5}$$

A Eq. (14.5) é chamada de *equação de campo*. Dada uma densidade de lagrangiana, esta equação resulta nas equações que descrevem teorias físicas, como o eletromagnetismo ou a relatividade geral.

15 Tensor Energia-Momento

De um modo bem semelhante à mecânica lagrangiana, podemos nos perguntar o que acontece se a densidade de langrangiana não depende explícitamente de uma coordenada x^ν. Ora, se este é o caso,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\nu} = 0 \\
&\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i}\frac{\partial \phi^i}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \phi^i}{\partial x^\mu}\right)}\frac{\partial^2 \phi^i}{\partial x^\nu \partial x^\mu} = 0
\end{aligned} \tag{15.1}$$

Considerando,

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \phi^i}{\partial x^\mu}\right)}\frac{\partial \phi^i}{\partial x^\nu}\right) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \phi^i}{\partial x^\mu}\right)}\right)\frac{\partial \phi^i}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \phi^i}{\partial x^\mu}\right)}\frac{\partial^2 \phi^i}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \tag{15.2}$$

Podemos reescrever a Eq. (15.1) como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\nu} &= \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \phi^i}{\partial x^\mu}\right)}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \phi^i}{\partial x^\mu}\right)}\frac{\partial \phi^i}{\partial x^\nu}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \phi^i}{\partial x^\mu}\right)}\frac{\partial \phi^i}{\partial x^\nu}\right)
\end{aligned} \tag{15.3}$$

Assim, finalmente,

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \phi^i}{\partial x^\mu}\right)}\frac{\partial \phi^i}{\partial x^\nu}\right)-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\nu}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \phi^i}{\partial x^\mu}\right)}\frac{\partial \phi^i}{\partial x^\nu}\right)-\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\delta^\mu_\nu \mathcal{L}\right)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \phi^i}{\partial x^\mu}\right)}\frac{\partial \phi^i}{\partial x^\nu}-\delta^\mu_\nu \mathcal{L}\right)=0 \tag{15.4}$$

A Eq. (15.4) indica que a quantidade entre parênteses é conservada, pois tem divergência nula. Esta quantidade é definida como *tensor Energia-Momento*, denotado por

$$T^\mu{}_\nu=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \phi^i}{\partial x^\mu}\right)}\frac{\partial \phi^i}{\partial x^\nu}-\delta^\mu_\nu \mathcal{L} \tag{15.5}$$

Portanto, a conservação do tensor energia-momento é a condição dada por,

$$\frac{\partial T^\mu{}_\nu}{\partial x^\mu}=0 \tag{15.6}$$

16 Sobre a Geometrização da Gravitação

Dentre as várias revoluções científicas ocorridas no século XIX, consequências da nova visão eletromagnética do mundo, destacam-se as teorias da relatividade especial e geral. Estas teorias são de grande relevância para estudar fenômenos macroscópicos em situações onde a mecânica newtoniana começa a apresentar falhas.

A relatividade especial estabelece que existe um limite superior para velocidade de propagação de interações na natureza, logo, aponta para uma inconsistência na teoria da gravitação universal de Newton, que consiste numa teoria de ação à distância instantânea.

Surge então a necessidade de propor uma nova teoria da gravitação, e isto pode ser feito a partir de algumas hipóteses e observações iniciais.

A principal hipótese foi o que Einstein chamou de *princípio da equivalência*, em que propõe que localmente não existe experimento capaz de diferenciar uma aceleração uniforme com a ação de um campo gravitacional constante.

Para visualizar a importância desta hipótese, devemos lembrar de uma razão muito importante estudada na geometria euclidiana:

$$\frac{C}{D} = \pi$$

Pela contração do espaço, resultado importante da relatividade especial, podemos estudar estas medidas sob a ótica de referenciais girantes. Um referencial parado e um girante irão concordar com a medida do diâmetro da trajetória. Porém, ao medirem a circunferência da trajetória, as medidas serão discordantes.

Logo, enquanto o referencial parado irá medir a razão $C/D = \pi$ da geometria euclidiana, o referencial girante medirá, de forma geral

$$\frac{C}{D} \neq \pi$$

ou seja, este referencial irá discordar da geometria euclidiana.

Como, pelo princípio da equivalência, não se pode distinguir entre um referencial uniformemente acelerado daquele que está sob efeito de um campo gravitacional constante, podemos assumir que uma teoria da gravitação que generaliza a relatividade especial é descrita a partir de uma geometria não-euclidiana, já que o referencial girante está sob efeito de uma aceleração.

Para fazer isto, deve-se aplicar a matemática adequada para tratar de espaços com curvatura. Esta teoria, portanto, deve estar naturalmente descrita por coordenadas curvilíneas.

Com estes elementos, Einstein lançou mão do *princípio da covariância geral*, que propõe que as leis da física devem ser iguais, independentemente das coordenadas escolhidas. Portanto, concluiu que as equações da física deveriam ser descritas a partir de *tensores*, pois equações tensoriais, assim que estabelecidas, continuam sendo verdadeiras sob transformações de coordenadas.

17 Símbolos de Christoffel

Em geometrias Euclidianas, os vetores da base são tidos como campos vetoriais constantes e unitários, além de obedesserem uma regra clara de ortogonalidade.

Porém, quando tratamos de geometrias não euclidianas, os campos vetoriais da base deixam de ser constantes, e o produto escalar da base passam a ser uma função que depende da posição. Outro detalhe importante de ser notado é que quando somamos ou subtraímos um vetor na geometria Euclidiana, efetuamos o transporte paralelo de um dos vetores, para que a operação seja efetuada no mesmo ponto.

Em uma geometria não-Euclidiana, isto não pode ser feito de uma maneira simples, pois o campo vetorial da base não é constante. Como o cálculo diferencial e integral é essencialmente construído a partir de limites de diferenças, a geometria não-Euclidiana leva ao desenvolvimento de novos objetos matemáticos que tornem possíveis as soluções de problemas do cálculo em tais geometrias.

Portanto, consideremos um vetor da base $\vec{e}_\mu(x^\nu)$ no ponto x^{ν_1} e no ponto x^{ν_2}, tal que x^{ν_1} e x^{ν_2} estão separados por uma variação na coordenada x^ν. Se quisermos medir a varição de $\vec{e}_\mu(x^\nu)$ quando ele vai de x^{ν_1} para x^{ν_2}, devemos efetuar a diferença de $\vec{e}_\mu(x^\nu)$ no ponto x^{ν_2} e $\vec{e}_\mu(x^\nu)$ no ponto x^{ν_1} paralelamente transportado para o ponto x^{ν_2}. Desta forma, definimos um vetor diferença que conecta um vetor ao outro, que é portanto chamado de vetor conexão, definido como

$$\Delta_{\nu_i}\vec{e}_\mu(x^\nu) = \vec{e}_\mu(x^{\nu_2}) - \vec{e}_\mu(x^{\nu_1})_{//} \tag{17.1}$$

Onde $\vec{e}_\mu(x^{\nu_1})_{//}$ é o vetor da base paralelamente transportado e $\Delta_{\nu_i}\vec{e}_\mu(x^\nu)$ é o vetor conexão que mede a variação do vetor da base quando este sofre uma variação na coordenada x^{ν_i}.

Por outro lado, pelas definições do cálculo de várias variáveis, temos que

$$\frac{\partial \vec{e}_\mu}{\partial x^{\nu_i}} = \lim_{x^{\nu_1} \to x^{\nu_2}} \frac{\vec{e}_\mu(x^{\nu_2}) - \vec{e}_\mu(x^{\nu_1})_{//}}{x^{\nu_2} - x^{\nu_1}} = \lim_{\Delta x_{\nu_i} \to 0} \frac{\Delta_{\nu_i}\vec{e}_\mu}{\Delta x^{\nu_i}} = \frac{d_{\nu_i}\vec{e}_\mu}{dx^{\nu_i}} \tag{17.2}$$

Portanto, podemos escrever

$$\frac{d_{\nu_i}\vec{e}_\mu}{dx^{\nu_i}} = \left(\frac{\partial \vec{e}_\mu}{\partial x^{\nu_i}}\right)^\alpha \vec{e}_\alpha \tag{17.3}$$

As componentes escalares do vetor conexão por unidade de distância são conhecidas como símbolos de Christoffel, denotados por

$$\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu_i} = \left(\frac{\partial \vec{e}_\mu}{\partial x^{\nu_i}}\right)^\alpha \tag{17.4}$$

18 Simetria dos Símbolos de Christoffel

Uma variação total da base é a soma da variação em todas as coordenadas. Usando as Eqs. (17.3) e (17.4), podemos escrever

$$d\vec{e}_\mu = d_{\nu_1}\vec{e}_\mu + d_{\nu_2}\vec{e}_\mu + ... + d_{\nu_n}\vec{e}_\mu$$
$$d\vec{e}_\mu = \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu_1} dx^{\nu^1}\vec{e}_\alpha + \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu_2} dx^{\nu^2}\vec{e}_\alpha + ... + \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu_n} dx^{\nu^n}\vec{e}_\alpha \tag{18.1}$$

Portanto, utilizando a convenção de somatório de Einstein, podemos escrever a variação total da base como

$$d\vec{e}_\mu = \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} dx^\nu \vec{e}_\alpha \tag{18.2}$$

Pela definição de derivadas totais, temos que

$$d\vec{e}_\mu = \frac{\partial \vec{e}_\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \tag{18.3}$$

Assim, pelas Eqs. (18.2) e (18.3)

$$\frac{\partial \vec{e}_\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu = \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} dx^\nu \vec{e}_\alpha$$
$$\Rightarrow \vec{e}_\alpha \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} = \frac{\partial \vec{e}_\mu}{\partial x^\nu} \tag{18.4}$$

Se decompormos $\vec{e}_\alpha$ em coordenadas cartesianas locais

$$\vec{e}_\mu = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\mu} \vec{e}_\sigma$$

Então, a Eq. (18.4) torna-se

$$\vec{e}_\alpha \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{x^\mu}} \vec{e}_\sigma\right) = \vec{e}_\sigma \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x^\nu x^\mu} \tag{18.5}$$

Pois $\vec{e_\sigma}$ é um campo vetorial constante e sua derivada é nula. Assim, pelo teorema de Clairaut,

$$\frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x^\nu x^\mu} = \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x^\mu x^\nu}$$

Concluí-se, pela Eq. (18.5), que

$$\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha{}_{\nu\mu} \tag{18.6}$$

Ou seja, os símbolos de Christoffel são simétricos nos índices de baixo.

Os símbolos de Christoffel portanto, surgem quando queremos estudar variação de vetores numa geometria em que o campo vetorial da base não é constante. Logo, fica evidente que, além de estes símbolos fornecerem toda a informação sobre as propriedades geométricas do sistema de coordenadas escolhido, são objetos imprescindíveis para uma formulação covariante da derivada.

19 Método para Calcular os Símbolos de Christoffel

Como foi visto no estudo do movimento de uma partícula livre, a sua trajetória depende dos símbolos de Christoffel, mas até o presente momento não foi apresentado um método para o cálculo destas quantidades. Tal método convém de ser muito simples. Vamos então calcular as componentes da conexão de uma geometria esférica utilizando tal método. Matricialmente, as componentes da métrica em tal geometria são representadas por

$$\|g_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 sen^2\theta \end{pmatrix} \tag{19.1}$$

Para prosseguir, determinamos a lagrangiana de uma partícula livre

$$L = \frac{1}{2} g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 sen^2\theta\dot{\phi}^2\right) \tag{19.2}$$

Agora calculamos as equações de Euler-Lagrange para as coordenadas em questão. Calculemos inicialmente para a coordenada r,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = 0 \\
&2r\dot{\theta}^2 + 2r sen^2\theta\dot{\phi}^2 - \frac{d}{dt}(2\dot{r}) = 0 \\
&\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r sen^2\dot{\phi}^2 = 0 \qquad (19.3)
\end{aligned}$$

Mas a equação da trajetória de uma partícula livre para a coordenada r é dada por

$$\ddot{r} + \Gamma^r{}_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k = 0 \tag{19.4}$$

Comparando as Eqs. (19.3) e (19.4), concluímos que

$$\begin{cases} \Gamma^r{}_{\theta\theta} = -r \\ \Gamma^r{}_{\phi\phi} = -rsen^2\theta \end{cases} \tag{19.5}$$

Calculando as equações de Euler-Lagrange para as coordenadas θ, obtemos,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 0 \\
&2r^2 sen\theta cos\theta \dot{\phi}^2 - \frac{d}{dt}\left(2r^2\dot{\theta}\right) = 0 \\
&2r^2 sen\theta cos\theta \dot{\phi}^2 - 4r\dot{r}\dot{\theta} - 2r^2\ddot{\theta} = 0 \\
&\ddot{\theta} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} - sen\theta cos\theta\dot{\phi}^2 = 0
\end{aligned} \tag{19.6}$$

Porém, a equação da trajetória de uma partícula livre para a coordenada θ é

$$\ddot{\theta} + \Gamma^\theta{}_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k = 0 \tag{19.7}$$

Comparando as Eqs. (19.6) e (19.7), concluímos que

$$\begin{cases} \Gamma^\theta{}_{r\theta} = \Gamma^r{}_{\theta r} = \frac{1}{r} \\ \Gamma^\theta{}_{\phi\phi} = -sen\theta cos\theta \end{cases} \tag{19.8}$$

Finalmente, calculando as equações de Euler-Lagrange para as coordenadas ϕ, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) = 0 \\
&\frac{d}{dt}\left(2r^2 sen^2\theta\dot{\phi}\right) = 0 \\
&2r\dot{r}sen^2\theta\dot{\phi} + 2r^2 sen\theta cos\theta\dot{\theta}\dot{\phi} + r^2 sen^2\theta\ddot{\phi} = 0 \\
&\ddot{\phi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\phi} + 2cotg\theta\dot{\theta}\dot{\phi} = 0
\end{aligned} \tag{19.9}$$

Porém, a equação da trajetória de uma partícula livre para a coordenada ϕ é

$$\ddot{\phi} + \Gamma^\phi{}_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k = 0 \tag{19.10}$$

Comparando as Eqs. (19.9) e (19.10), concluímos que

$$\begin{cases} \Gamma^{\phi}{}_{r\phi} = \Gamma^{\phi}{}_{\phi r} = \frac{1}{r} \\ \Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi} = \Gamma^{\phi}{}_{\phi\theta} = cotg\theta \end{cases} \tag{19.11}$$

Assim, as Eqs. (19.5), (19.8) e (19.11) formam o conjunto de todos os símbolos de Christoffel não nulos da geometria esférica.

20 O Problema com as Derivadas Parciais

Para descrever leis da natureza, faz-se o uso de equações diferenciais, cujas soluções descrevem situações ou comportamentos de sistemas físicos. O objeto fundamental de tais equações é o operador diferencial. Porém, algumas dificuldades surgem ao tentar descrever leis da física de forma covariante.

Considerando um vetor $\vec{A}$, temos que a derivada parcial de suas componentes escalares transforma segundo

$$\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu'}} \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} A^{\mu'} \right) = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial x^{\nu'} x^{\mu'}} A^{\mu'} + \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial A^{\mu'}}{\partial x^{\nu'}} \tag{20.1}$$

Ou seja, as derivadas das componentes de um vetor não transformam como um tensor, o que impossibilita o uso deste operador para a formulação de qualquer lei covariante que envolva tensores.

21 Derivada Direcional Covariante

Como o vetor $\vec{A}$, assim como todo vetor, é um invariante, uma maneira instrutiva de encontrar um operador diferencial covariante é estudando como $\vec{A}$ varia quando é deslocado sobre uma curva $x^\nu(\lambda)$. Considerando inicialmente uma base vetorial constante, a derivada direcional de $\vec{A} = A^\mu(x^\nu(\lambda))\vec{e}_\mu$ na direção da curva é

$$\frac{d\vec{A}}{d\lambda} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\vec{e}_\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu}u^\nu\vec{e}_\mu \tag{21.1}$$

Onde u^ν é o vetor tangente à curva.

Se considerarmos um campo vetorial mais geral, onde a base depende das coordenadas, de forma que $\vec{A} = A^\mu(x^\nu(\lambda))\vec{e}_\mu(x^\nu(\lambda))$, utilizando a Eq. (18.4), a derivada será

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{A}}{d\lambda} &= \frac{dA^\mu}{d\lambda}\vec{e}_\mu + A^\mu\frac{d\vec{e}_\mu}{d\lambda} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu}u^\nu\vec{e}_\mu + A^\mu\frac{\partial\vec{e}_\mu}{\partial x^\nu}u^\nu \\ &= \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu}u^\nu\vec{e}_\mu + A^\mu\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}\vec{e}_\alpha u^\nu \\ &= \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\nu}A^\alpha\right)u^\nu\vec{e}_\mu \end{aligned} \tag{21.2}$$

Por considerar a variação de um campo vetorial da base, $\frac{d\vec{A}}{d\lambda}$ é chamada de *derivada direcional covariante*.

22 Derivada Covariante

Comparando as Eqs. (21.1) e (21.2), vemos que o termo entre parênteses da Eq. (21.2) é uma espécie de generalização natural da derivada parcial das componentes escalares do vetor, denotada por

$$\nabla_\nu A^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\nu} A^\alpha \tag{22.1}$$

Assim, podemos reescrever a Eq. (21.2) como

$$\frac{d\vec{A}}{d\lambda} = \nabla_\nu A^\mu u^\nu \vec{e}_\mu \tag{22.2}$$

Como a Eq. (22.2) é covariante, esta expressão é a mesma em qualquer sistema de coordenadas, logo

$$\frac{d\vec{A}}{d\lambda} = \nabla_{\nu'} A^{\mu'} u^{\nu'} \vec{e}_{\mu'} = \nabla_\nu A^\mu u^\nu \vec{e}_\mu$$

Assim

$$\begin{aligned}
\nabla_\nu A^\mu u^\nu \vec{e}_\mu &= \nabla_{\nu'} A^{\mu'} u^{\nu'} \vec{e}_{\mu'} \\
\nabla_\nu A^\mu u^\nu \vec{e}_\mu &= \nabla_{\nu'} A^{\mu'} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} u^\nu \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \vec{e}_\mu \\
\Rightarrow \nabla_\nu A^\mu &= \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \nabla_{\nu'} A^{\mu'}
\end{aligned}$$

Pois a igualdade deve se manter para curvas e bases arbitrárias. Assim, vemos que $\nabla_\nu A^\mu$ transforma como um tensor, portanto, este operador, definido pela Eq. (22.1), é chamado de *derivada covariante*. Por ser uma generalização das derivadas parciais, este operador sugere que uma formulação covariante de uma equação que envolve derivadas consiste na substituição destas por derivadas covariantes.

23 Derivada Covariante das Componentes Covariantes de um Vetor

Como um escalar não é descrito em termos de bases, a derivada covariante de um escalar é igual à derivada partial do mesmo. Usando esta observação, podemos obter a expressão para a derivada covariante de componentes covariante de um vetor, pois, como $A^{\mu} A_{\mu}$ é um escalar

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\nu}\left(A^{\mu} A_{\mu}\right) &= \frac{\partial\left(A^{\mu} A_{\mu}\right)}{\partial x^{\nu}} \\
\left(\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\nu} A^{\alpha}\right) A_{\mu} + A^{\mu} \nabla_{\nu} A_{\mu} &= \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\nu}} A_{\mu} + \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}} A^{\mu} \\
A^{\mu} \nabla_{\nu} A_{\mu} &= A_{\mu} \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\nu}} - A^{\alpha} \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\nu} A_{\mu} \qquad (23.1)
\end{aligned}
$$

Como a Eq. (23.1) é verdadeira para todo A^{μ},

$$
\nabla_{\nu} A_{\mu} = \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} A_{\alpha} \qquad (23.2)
$$

Como

$$
\frac{d\vec{A}}{d\lambda} = \nabla_{\nu} A_{\mu} u^{\nu} \vec{e}_{\mu} \qquad (23.3)
$$

Segue que,

$$
\frac{\partial \vec{e}_{\mu}}{\partial x^{\nu}} = -\Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho} \vec{e}^{\rho} \qquad (23.4)
$$

Um detalhe muito importante para que possamos estabelecer uma expressão para a derivada covariante de um tensor misto de ordem arbitrária.

24 Derivada Covariante de um Tensor Misto de Ordem Arbitrária

Para obter uma expressão para a derivada covariante de um tensor misto de ordem arbitrária é útil considerar inicialmente um tensor misto de ordem 2. Assim, tomemos

$$T = (A^{\mu}\vec{e}_{\mu}) \otimes (B_{\nu}\vec{e}^{\nu}) = A^{\mu}B_{\nu}\vec{e}_{\mu} \otimes \vec{e}^{\nu} = T^{\mu}{}_{\nu}\vec{e}_{\mu} \otimes \vec{e}^{\nu} \tag{24.1}$$

Se calcularmos a derivada covariante direcional deste tensor, teremos

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{d\lambda} &= \frac{d(A^{\mu}\vec{e}_{\mu})}{d\lambda} \otimes (B_{\nu}\vec{e}^{\nu}) + (A^{\mu}\vec{e}_{\mu}) \otimes \frac{d(B_{\nu}\vec{e}^{\nu})}{d\lambda} \\
&= (\nabla_{\sigma}A^{\mu}u^{\sigma}\vec{e}_{\mu}) \otimes B_{\nu}\vec{e}^{\nu} + A^{\mu}\vec{e}_{\mu} \otimes (\nabla_{\sigma}B_{\nu}u^{\sigma}\vec{e}^{\nu}) \\
&= (B_{\nu}\nabla_{\sigma}A^{\mu})u^{\sigma}\vec{e}_{\mu} \otimes \vec{e}^{\nu} + (A^{\mu}\nabla_{\sigma}B_{\nu})u^{\sigma}\vec{e}_{\mu} \otimes \vec{e}^{\nu} \\
&= (B_{\nu}\nabla_{\sigma}A^{\mu} + A^{\mu}\nabla_{\sigma}B_{\nu})u^{\sigma}\vec{e}_{\mu} \otimes \vec{e}^{\nu} \\
&= \nabla_{\sigma}(A^{\mu}B_{\nu})u^{\sigma}\vec{e}_{\mu} \otimes \vec{e}^{\nu} \\
&= \nabla_{\sigma}T^{\mu}{}_{\nu}u^{\sigma}\vec{e}_{\mu} \otimes \vec{e}^{\nu}
\end{aligned} \tag{24.2}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\nabla_{\sigma}T^{\mu}{}_{\nu} &= \nabla_{\sigma}(A^{\mu}B_{\nu}) \\
&= B_{\nu}\nabla_{\sigma}A^{\mu} + A^{\mu}\nabla_{\sigma}B_{\nu} \\
&= B_{\nu}\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} + B_{\nu}\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\rho}A^{\rho} + A^{\mu}\frac{\partial B_{\nu}}{\partial x^{\sigma}} - A^{\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\sigma\nu}B_{\rho} \\
&= B_{\nu}\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} + A^{\mu}\frac{\partial B_{\nu}}{\partial x^{\sigma}} + \Gamma^{\mu}{}_{\sigma\rho}A^{\rho}B_{\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\sigma\nu}A^{\mu}B_{\rho} \\
&= \frac{\partial(A^{\mu}B_{\nu})}{\partial x^{\sigma}} + \Gamma^{\mu}{}_{\sigma\rho}A^{\rho}B_{\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\sigma\nu}A^{\mu}B_{\rho} \\
&= \frac{\partial T^{\mu}{}_{\nu}}{\partial x^{\sigma}} + \Gamma^{\mu}{}_{\sigma\rho}T^{\rho}{}_{\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\sigma\nu}T^{\mu}{}_{\rho}
\end{aligned} \tag{24.3}$$

Assim, é possível ver que a derivada covariante deste tensor tem uma expressão parecida à da derivada covariante de um vetor, porém, temos um símbolo de Christoffel para cada índice do tensor, sendo positivo para componentes contravariantes e negativo para componentes covariantes. Assim, podemos escrever a expressão da derivada covariante de um tensor misto de ordem arbitrária como,

$$\begin{aligned}\nabla_\sigma H^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n} = \frac{\partial H^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n}}{\partial x^\sigma} + \Gamma^{\mu_1}{}_{\sigma\rho} H^{\rho \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n} + \dots \\ + \Gamma^{\mu_m}{}_{\sigma\rho} H^{\mu_1 \dots \rho}{}_{\nu_1 \dots \nu_n} - \Gamma^{\rho}{}_{\sigma\nu_1} H^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\rho \dots \nu_n} - \dots \\ - \Gamma^{\rho}{}_{\sigma\nu_n} H^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \rho}.\end{aligned} \tag{24.4}$$

25 Um Detalhe Importante Sobre as Derivadas Covariantes

Diferentemente das derivadas parciais, as derivadas covariantes não calculam apenas a variação das componentes escalares de um vetor. Isso pode ser notado definindo um vetor em coordenadas esféricas que só tem componentes não nula na coordenada θ,

$$A^{\mu} = (0, A^{\theta}, 0)$$

Assim, podemos calcular a componente radial da derivada covariante deste vetor,

$$\begin{aligned}
\nabla_r A^{\mu} &= \frac{\partial A^{\mu}}{\partial r} + \Gamma^{\mu}{}_{r\nu} A^{\nu} \\
\nabla_r A^{\theta} &= \Gamma^{\theta}{}_{r\theta} A^{\theta}
\end{aligned}$$

Como $\Gamma^{\theta}{}_{r\theta} = {}^{1}/_{2}$,

$$\nabla_r A^{\theta} = \frac{1}{2} A^{\theta} \tag{25.1}$$

Este resultado, pela nossa noção intuitiva de derivadas parciais, deveria ser nulo. Isto indica que apesar das aparências, a derivada covariante calcula a variação de todo o vetor, ao invés de apenas suas componentes escalares.

26 Relação dos Símbolos de Christoffel com as Componentes do Tensor Métrico

Tendo definido tudo isso, pode-se encontrar uma expressão para os símbolos de Christoffel. Para isto, consideremos um tensor cujas componentes mistas sejam idênticas às da delta de Kronecker. Então

$$
\begin{aligned}
\nabla_\beta \delta^\mu_\nu &= \frac{\partial \delta^\mu_\nu}{\partial x^\beta} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\delta^\alpha_\nu - \Gamma^\alpha{}_{\nu\beta}\delta^\mu_\alpha \\
&= \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\delta^\alpha_\nu - \Gamma^\alpha{}_{\nu\beta}\delta^\mu_\alpha \\
&= \Gamma^\mu{}_{\nu\beta} - \Gamma^\mu{}_{\nu\beta} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{26.1}
$$

Por outro lado temos que, por definição, os componentes mistos do tensor métrico são

$$g^\mu_\nu = \vec{e}^\mu \cdot \vec{e}_\nu = \delta^\mu_\nu$$

E o tensor métrico, escrito em termos de suas bases, é

$$g = g_{\mu\nu}\vec{e}^\mu \otimes \vec{e}^\nu = g^\mu_\nu \vec{e}_\mu \otimes \vec{e}^\nu$$

Logo, a derivada covariante direcional do tensor métrico é dado por

$$\frac{dg}{d\lambda} = \nabla_\beta g_{\mu\nu} u^\beta \vec{e}^\mu \otimes \vec{e}^\nu = \nabla_\beta g^\mu_\nu u^\beta \vec{e}_\mu \otimes \vec{e}^\nu = \nabla_\beta \delta^\mu_\nu u^\beta \vec{e}_\mu \otimes \vec{e}^\nu = 0$$

Assim,

$$\nabla_\beta g_{\mu\nu} u^\beta \vec{e}^\mu \otimes \vec{e}^\nu = 0$$

Para uma curva e bases arbitrárias, concluí-se que

$$\nabla_\beta g_{\mu\nu} = 0 \tag{26.2}$$

A Eq. (26.2) é conhecida como a condição de compatibilidade métrica. Fazendo,

$$\nabla_\beta g_{\mu\nu} + \nabla_\mu g_{\nu\beta} + \nabla_\nu g_{\beta\mu} = 0 \tag{26.3}$$

Pelas Eqs. (24.4) e (18.6), podemos resolver a Eq. (26.3) para o símbolo de Christoffel,

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} \left(\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \right) \tag{26.4}$$

27 Transporte Paralelo

Estamos habituados a transportar vetores sem alterar sua magnitude ou direção, a este processo chamamos de transporte paralelo. Apesar de ser um processo simples a ponto de não ser citado em geometrias planas, sabemos, pelo capítulo dos símbolos de Christoffel, que a coisa não é tão simples assim.

Para ver isto, imagine que você e um amigo estão no mesmo local da linha do equador, cada um segurando setas que apontam diretamente para o norte. Em um momento, você e seu amigo combinam em andar 500km para lados opostos, mantendo a direção da seta, e então andar para o norte até se reencontrarem. . Assim, você anda 500km para o oeste, e seu amigo anda 500km para o leste, e depois os dois prontamente rumam para o norte, mantendo a direção das setas. Ao se reencontrarem no norte, percebem que as setas, paralelas no início da jornada, agora formam um ângulo entre si. Tal experimento pode ser fisicamente replicado utilizando um pêndulo ao invés de uma seta, onde a direção do movimento do pêndulo assume o papel da direção da seta.

Este experimenro indica que vetores são transformados ao serem transportados sobre uma geometria curva, como a superfície da terra. Assim, podemos definir o transporte paralelo como a ausência de tal transformação. Matematicamente, isto significa dizer que um vetor $\vec{V}$ não varia ao ser transportado sobre uma curva $x^\mu(\lambda)$,

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{V}}{d\lambda} &= \frac{dV^\mu}{d\lambda}\vec{e}_\mu + V^\mu \frac{d\vec{e}_\mu}{d\lambda} = \frac{dV^\mu}{d\lambda}\vec{e}_\mu + V^\mu \frac{\partial \vec{e}_\mu}{\partial x^\nu}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \\
&= \frac{dV^\mu}{d\lambda}\vec{e}_\mu + V^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda}\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}\vec{e}_\rho = 0 \\
&= \left(\frac{dV^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu{}_{\rho\nu} V^\rho \frac{dx^\nu}{d\lambda}\right)\vec{e}_\rho = 0
\end{aligned}$$

Portanto, a condição de transporte paralelo pode ser escrita como,

$$\frac{dV^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu{}_{\rho\nu} V^\rho \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \tag{27.1}$$

28 Equação da Geodésica Revisitada

A equação da geodésica, vista anteriormente neste texto, pode ser apresentada de uma forma muito simples e intuitiva a partir da noção de transporte paralelo. Para isto, basta lembrar que no plano a geodésica é uma linha reta, e portante seu vetor tangente coincide com a reta em todos os pontos, senso portanto paralelamente transportado sobre a reta.

Podemos generalizar esta ideia para outras geometrias, de tal forma que a geodésica é definida como a curva cujo vetor tangente é paralelamente transportado ao ser deslocado sobre ela. Matematicamente, isto quer dizer que dada a curva $x^{\mu}(\lambda)$, a geodésica é a curva que satisfaz a condição de transporte paralelo dada pela Eq. (27.1), tal que o vetor paralelamente transportado V^{μ} é o vetoor tangente $\frac{dx^{\mu}}{d\lambda}$. Assim

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{dx^{\mu}}{d\lambda}\right) + \Gamma^{\mu}{}_{\rho\nu}\frac{dx^{\rho}}{d\lambda}\frac{dx^{\nu}}{d\lambda} = 0 \\
&\Rightarrow \frac{d^2x^{\mu}}{d\lambda} + \Gamma^{\mu}{}_{\rho\nu}\frac{dx^{\rho}}{d\lambda}\frac{dx^{\nu}}{d\lambda} = 0
\end{aligned} \tag{28.1}
$$

Esta forma de definir a geodésica equivale a dizer que a geodésica é a curva mais reta possível dada uma geometria.

29 Circulação e Rotacional

O conhecimento de uma formulação intrínseca do conceito de curvartura é crucial para o estudo da teoria da relatividade geral. Porém, para conseguirmos isto, devemos entender dois conceitos fundamentais, o primeiro é o conceito de rotacional e sua definição em termos da circulação de um campo vetorial, definida por

$$C = \oint \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

Assim, o rotacional de $\vec{A}$ é definido como o vetor normal ao plano em que a curva de circulação está contida e cujo comprimento é a circulação por unidade de área

$$rot(\vec{A}) = \vec{n} \lim_{\Delta S \to 0} \frac{1}{\Delta S} \oint \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

O que pode ser reescrito como

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{r} = \Big(rot(\vec{A})\Big)_n dS$$

Se a curva e a superfícia determinada por ela são descritas pelas coordenadas $\{\, x^\alpha, x^\beta \,\}$, podemos escrever

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{r} = \Big(rot(\vec{A})\Big)_{\alpha\beta} dS^{\alpha\beta} \tag{29.1}$$

Calculando a circulação de um vetor em termos de suas componentes covariantes, em uma circulação qualquer em coordenadas cartesianas, chegamos numa expressão para as componentes do rotacional. Por conta da forma da expressão e da simetria dos símbolos de Christoffel, que surgem no processo de generalização a partir da troca de derivadas parciais por derivadas covariantes, temos que as componentes do rotacional em um sistema de coordenadas quaisquer $\{\, x^\alpha, x^\beta \,\}$ são dadas por

$$\Big(rot(\vec{A})\Big)_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} \tag{29.2}$$

30 Tensor de Riemann

O segundo conceito fundamental para a formulação da curvatura é o o transporte paralelo, que consiste na ausência de mudanças num vetor quando o mesmo é transportado sobre uma curva. Isto quer dizer, em termos matemáticos, que a sua derivada direcional covariante é nula,

$$\frac{d\vec{A}}{d\lambda} = \nabla_\nu A_\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \vec{e}^\mu = 0 \tag{30.1}$$

Onde consideramos as componentes covariantes de $\vec{A}$ por conveniência. A Eq. (30.1) é conhecida como condição de transporte paralelo, e pode ser reescrita como

$$dA_\mu = \nabla_\nu A_\mu dx^\nu = 0 \tag{30.2}$$

Pelas Eqs. (23.1) e (30.2), concluímos que

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} = \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} A_\rho \tag{30.3}$$

Assim, para calcular a mudança total de um vetor quando o mesmo é paralelamente transportado sobre uma curva fechada, basta calcular

$$\Delta A_\mu = \oint dA_\mu = \oint \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \tag{30.4}$$

Pela Eq. (30.3), podemos escrever a mudança total como,

$$\Delta A_\mu = \oint \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} A_\rho dx^\nu \tag{30.5}$$

Definindo,

$$B_{\mu\nu} = \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} A_\rho$$

Podemos definir o vetor

$$\vec{B}_\mu = B_{\mu\nu} \vec{e}^\nu \tag{30.6}$$

Assim, a Eq. (30.5) pode ser reescrita por

$$\Delta A_\mu = \oint B_{\mu\nu} dx^\nu = \oint \vec{B}_\mu \cdot d\vec{r} \tag{30.7}$$

Pela Eq. (29.1), temos que

$$\oint \vec{B}_\mu \cdot d\vec{r} = \left(rot(\vec{B}_\mu)\right)_{\alpha\beta} dS^{\alpha\beta}$$

Finalmente, pelas Eqs. (29.2), (30) e (30.6),

$$\begin{aligned}
\left(rot(\vec{B}_\mu)\right)_{\alpha\beta} &= \frac{\partial B_{\mu\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial B_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} \\
&= \frac{\partial \Gamma^\rho{}_{\mu\beta} A_\rho}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \Gamma^\rho{}_{\mu\alpha} A_\rho}{\partial x^\beta} \\
&= \frac{\partial \Gamma^\rho{}_{\mu\beta}}{\partial x^\alpha} A_\rho + \frac{\partial A_\rho}{\partial x^\alpha} \Gamma^\rho{}_{\mu\beta} - \frac{\partial \Gamma^\rho{}_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} A_\rho - \frac{\partial A_\rho}{\partial x^\beta} \Gamma^\rho{}_{\mu\alpha}
\end{aligned} \tag{30.8}$$

A Eq. (30.8) pode ser reescrita, com o auxílio da igualdade dada pela Eq. (30.3), como

$$\begin{aligned}
\left(rot(\vec{B}_\mu)\right)_{\alpha\beta} &= \frac{\partial \Gamma^\rho{}_{\mu\beta}}{\partial x^\alpha} A_\rho - \frac{\partial \Gamma^\rho{}_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} A_\rho + \Gamma^\rho{}_{\mu\beta} \Gamma^\sigma{}_{\rho\alpha} A_\sigma - \Gamma^\rho{}_{\mu\alpha} \Gamma^\sigma{}_{\rho\beta} A_\sigma \\
&= \left(\frac{\partial \Gamma^\rho{}_{\mu\beta}}{\partial x^\alpha} A_\rho - \frac{\partial \Gamma^\rho{}_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} A_\rho + \Gamma^\sigma{}_{\mu\beta} \Gamma^\rho{}_{\sigma\alpha} - \Gamma^\sigma{}_{\mu\alpha} \Gamma^\rho{}_{\sigma\beta} \right) A_\rho
\end{aligned} \tag{30.9}$$

O termo entre parênteses é o tensor de Rank-4 conhecido como *tensor de Riemann* ou *tensor de curvatura*, denotado por

$$R^\rho{}_{\mu\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma^\rho{}_{\mu\beta}}{\partial x^\alpha} A_\rho - \frac{\partial \Gamma^\rho{}_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} A_\rho + \Gamma^\sigma{}_{\mu\beta} \Gamma^\rho{}_{\sigma\alpha} - \Gamma^\sigma{}_{\mu\alpha} \Gamma^\rho{}_{\sigma\beta} \tag{30.10}$$

Pela definição do tensor de Riemann, concluí-se que

$$R^\rho{}_{\mu\alpha\beta} = -R^\rho_{\mu\beta\alpha}$$

Logo,

$$\frac{1}{2} R^\rho{}_{\mu\alpha\beta} = R^\rho{}_{\mu\alpha\beta} - R^\rho{}_{\mu\beta\alpha}$$

Assim, a variação total do vetor, ΔA_μ é

$$\Delta A_{\mu} = \frac{1}{2} R^{\rho}{}_{\mu\alpha\beta} A_{\rho} dS^{\alpha\beta} \tag{30.11}$$

Onde o fator de 1/2 surge por conta da antissimetria dos índices α e β. Assim, vemos que em um espaço curvo, a transformação de um vetor ao ser paralelamente transportado ao longo de uma curva fechada é proporcional ao produto da curvatura e da área englobada pela curva.

31 Tensor e escalar de Ricci

Pode-se escrever o tensor de Riemann como um tensor totalmente covariante, dado por

$$
\begin{aligned}
R_{\mu\nu\rho\sigma} &= g_{\mu\lambda} R^{\lambda}{}_{\nu\rho\sigma} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu \partial x^\rho} + \frac{\partial^2 g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu \partial x^\rho}\right) \\
&\quad + g_{\kappa\lambda}\left(\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\rho}\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\sigma} - \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma}\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\rho}\right)
\end{aligned}
\tag{31.1}
$$

Pela Eq. (31.1), temos que

$$
R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\nu\mu\rho\sigma} \tag{31.2}
$$

e,

$$
R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\rho} \tag{31.3}
$$

Assim, temos que

$$
\begin{aligned}
R^{\mu}{}_{\mu\rho\sigma} &= g^{\nu\mu} R_{\nu\mu\rho\sigma} = -g^{\nu\mu} R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R^{\nu}{}_{\nu\rho\sigma} \\
&\Rightarrow R^{\mu}{}_{\mu\rho\sigma} = 0
\end{aligned}
$$

Portanto, o único tensor não trivial que pode ser formado a partir de contrações do tensor de Riemann é

$$
R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\sigma\lambda} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu} \tag{31.4}
$$

Já que a contração com o último índice resultaria basicamente no mesmo tensor (multiplicado por -1), por conta da antissimetria dos dois últimos índices do tensor de curvatura. O tensor definido pela Eq. (31.4) é conhecido como *tensor de Ricci*. Seu traço,

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \tag{31.5}$$

é conhecido como *escalar de Ricci*.

32 Identidades de Bianchi e Tensor de Einstein

Existem duas identidades matemáticas envolvendo o tensor de Riemann, conhecidas como *identidades de Bianci*. A primeira identidade de Bianchi estabelece que

$$R^{\mu}{}_{\rho\sigma\nu} + R^{\mu}{}_{\sigma\nu\rho} + R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = 0 \tag{32.1}$$

Que pode ser facilmente verificada utilizando a definição do tensor de Riemann dada pela Eq. (30.10).

A segunda identidade de Bianchi, que requer uma escolha apropriada de sistema de coordenadas para ser demonstrada, estabelece que

$$\nabla_{\mu} R^{\kappa}{}_{\lambda\nu\rho} + \nabla_{\nu} R^{\kappa}{}_{\lambda\rho\mu} + \nabla_{\rho} R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} = 0 \tag{32.2}$$

Se multiplicarmos a Eq. (32.2) por δ^{ν}_{κ}, de modo a obter o tensor de Ricci no primeiro termo, teremos,

$$\begin{aligned}
&\delta^{\nu}_{\kappa} \nabla_{\mu} R^{\kappa}{}_{\lambda\nu\rho} + \delta^{\nu}_{\kappa} \nabla_{\nu} R^{\kappa}{}_{\lambda\rho\mu} \delta^{\nu}_{\kappa} \nabla_{\rho} R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} = 0 \\
&\nabla_{\mu} R_{\lambda\rho} + \nabla_{\nu} R^{\nu}{}_{\lambda\rho\mu} + \nabla_{\rho} R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\kappa} = 0 \\
&\nabla_{\mu} R_{\lambda\rho} + \nabla_{\nu} R^{\nu}{}_{\lambda\rho\mu} - \nabla_{\rho} R^{\kappa}{}_{\lambda\kappa\mu} = 0 \\
&\nabla_{\mu} R_{\lambda\rho} + \nabla_{\nu} R^{\nu}{}_{\lambda\rho\mu} - \nabla_{\rho} R_{\lambda\mu} = 0
\end{aligned} \tag{32.3}$$

Agora, multiplicamos Eq. (32.3) por $g^{\lambda\rho}$, de forma a obter o escalar de Ricci no primeiro termo,

$$
\begin{aligned}
& g^{\lambda\rho}\nabla_\mu R_{\lambda\rho} + g^{\lambda\rho}\nabla_\nu R^\nu{}_{\lambda\rho\mu} - g^{\lambda\rho}\nabla_\rho R_{\lambda\mu} = 0 \\
& \nabla_\mu g^{\lambda\rho} R_{\lambda\rho} + g^{\lambda\rho}\nabla_\nu g^{\sigma\nu} R_{\sigma\lambda\rho\mu} - \nabla_\rho g^{\lambda\rho} R_{\lambda\mu} = 0 \\
& \nabla_\mu R + \nabla_\nu g^{\lambda\rho} g^{\sigma\nu} R_{\sigma\lambda\rho\mu} - \nabla_\rho R^\rho{}_\mu = 0 \\
& \nabla_\mu R - \nabla_\nu g^{\lambda\rho} g^{\sigma\nu} R_{\lambda\sigma\rho\mu} - \nabla_\rho R^\rho{}_\mu = 0 \\
& \nabla_\mu R - \nabla_\nu g^{\sigma\nu} R_{\sigma\mu} - \nabla_\rho R^\rho{}_\mu = 0 \\
& \nabla_\mu R - \nabla_\nu R^\nu{}_\mu - \nabla_\rho R^\rho{}_\mu = 0
\end{aligned}
\tag{32.4}
$$

Renomeando alguns índices, podemos escrever a Eq. (32.4) como

$$
\begin{aligned}
& \nabla_\nu \delta^\nu_\mu R - \nabla_\nu R^\nu{}_\mu - \nabla_\nu R^\nu{}_\mu = 0 \\
& \nabla_\nu \left(R^\nu{}_\mu - \frac{1}{2}\delta^\nu_\mu R \right) = 0
\end{aligned}
\tag{32.5}
$$

Como $R^\nu{}_\mu = g_{\mu\sigma} R^{\nu\sigma}$ e $\delta^\sigma_\mu = g^{\nu\sigma} g_{\mu\sigma}$, podemos reescrever a Eq. (32.5) como

$$
\begin{aligned}
& \nabla_\nu \left(g_{\mu\sigma} \left(R^{\nu\sigma} - \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} R \right) \right) = 0 \\
& \nabla_\nu \left(R^{\nu\sigma} - \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} R \right) = 0
\end{aligned}
\tag{32.6}
$$

Trocando ($\nu \to \mu$) e depois ($\sigma \to \nu$), temos

$$
\nabla_\mu \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) = 0 \tag{32.7}
$$

ou

$$
\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0 \tag{32.8}
$$

Onde

$$
G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \tag{32.9}
$$

é o tensor de Einstein. Ele pode ser escrito em sua forma totalmente covariante, pois

$$
G_{\mu\nu} = g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} G^{\sigma\rho} \tag{32.10}
$$

Assim,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \tag{32.11}$$

Veremos muito em breve que, por ter divergência covariante nula, dada pela Eq. (32.8), o tensor de Einstein tem um papel central na formulação da teoria da relatividade geral.

33 Relação entre a Métrica e o Potencial Gravitacional Newtoniano

.

Para escrever as novas leis da gravitação, alguns critérios convenientes devem ser satisfeitos. Para satisfazer o princípio da covariância geral, as equações devem ser tensoriais. Além disso, devem reduzir-se à gravitação universal de Newton no limite newtoniano de campos fracos, estacionários e de partículas com $v \ll c$.

A gravitação newtoniana pode ser descrita pela equação de Poisson para o potencial gravitacional, dada por

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \tag{33.1}$$

Onde ρ é o conteúdo de matéria e G é a constante gravitacional. Assim, a Eq. (33.1) relaciona derivadas segundas do potencial gravitacional com o conteúdo de matéria. O lado direito desta equação pode ser covariantemente representado pelo *tensor energia-momento* $T_{\mu\nu}$, que é uma quantidade conservada na teoria clássica de campos, quando uma densidade de lagrangiana $\mathcal{L}$ não depende de alguma coordenada de espaço tempo, tal que esta equação de conservação é dada pela divergência nula de $T^{\mu\nu}$

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = 0 \tag{33.2}$$

Assim, em uma formulação covariante da Eq. (33.1), o lado esquerdo da equação pode ser escrito como $\kappa T_{\mu\nu}$.

Para encontrar o objeto matemático que representa o lado esquerdo desta equação de Poisson, devemos analisar a ação de uma partícula livre relativística, dada por

$$S = -mc \int_\gamma \sqrt{-g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} dt$$

para $v \ll c$, podemos fazer uma expansão binomial de $L = -mc(-g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu)^{1/2}$. Ignorando os termos de maior ordem, temos que no limíte relativístico

$$L = -mc + \frac{1}{2}mv^2$$

Como a forma geral da lagrangiana de uma partícula é dada por $L = T - V$, se uma partícula está sob influência de um campo gravitacional, seu potencial é $V = m\phi$. Assim,

$$L = -mc + \frac{1}{2}mv^2 - m\phi$$

O que pode ser escrito como

$$\begin{aligned} L &= -mc\sqrt{c^2 - v^2 + 2\phi} \\ &= -mc\sqrt{\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)c^2 - v^2} \\ &= -mc\sqrt{\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)c^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2} \end{aligned}$$

Assim, a ação

$$S = -mc\int_\gamma \sqrt{\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)c^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2 dt} = -mc\int_\gamma \sqrt{-g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}dt \tag{33.3}$$

Logo, no limite newtoniano

$$g_{00} = -\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) \tag{33.4}$$

A Eq. (33.4) estabelece uma relação entre o potencial gravitacional e as componentes da métrica. Logo, é necessário estabelecer uma relação entre as derivadas segundas da métrica e o conteúdo de matéria.

34 Equações de Campo de Einstein

Pela Eq. (33.2) e pelo princípio da covariância geral, que consiste, *grosso modo*, na substituição de derivadas parciais por covariantes, sabemos que a divergência covariante deste tensor tem que ser nula

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{34.1}$$

Logo, o tensor do lado esquerdo da igualdade, definido em termos das derivadas segundas da métrica, deve ter divergência covariante nula. Sabemos da seção anterior que o tensor de Einstein satisfaz esta condição, assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \kappa T_{\mu\nu} \\ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} &= \kappa T_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{34.2}$$

Se tomarmos o traço desta equação,

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}\right) &= g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \\ \Rightarrow R &= -\kappa T \end{aligned}$$

Logo, a Eq. (34.2) pode ser escrita como

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu}\right) \tag{34.3}$$

Para estas equações serem consistentes com as observações, elas devem se reduzir à gravitação de Newton, ou seja, à Eq. (33.1) no limite newtoniano, que pode ser descrito como um regime de campos fracos e estáticos. Como o campo é fraco, podemos escrever as componentes da métrica como sendo resultado de uma pequena perturbação na métrica de Minkowski. Assim, o limite newtoniano se reduz às condições

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad \|h_{\mu\nu}\| \ll 1 \tag{34.4}$$

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} = 0 \tag{34.5}$$

Podemos considerar que,

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \beta h^{\mu\nu}$$

tal que

$$g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = \delta_\mu^\nu$$

Assim,

$$\begin{aligned}
g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} &= (\eta_{\mu\alpha} + h_{\mu\alpha})(\eta^{\alpha\nu} - \beta h^{\alpha\nu}) = \delta_\mu^\nu \\
&= \eta_{\mu\alpha}\eta^{\alpha\nu} + \beta\eta_{\mu\alpha}h^{\alpha\nu} + \eta^{\alpha\nu}h_{\mu\alpha} + \beta h_{\mu\alpha}h^{\alpha\nu} = \delta_\mu^\nu \\
&= \delta_\mu^\nu + \beta\eta_{\mu\alpha}h^{\alpha\nu} + \eta^{\alpha\nu}h_{\mu\alpha} + \mathcal{O}(h^2) = \delta_\mu^\nu \\
&= \beta\eta_{\mu\alpha}h^{\alpha\nu} + \eta^{\alpha\nu}h_{\mu\alpha} + \mathcal{O}(h^2) = 0
\end{aligned}$$

ao despresarmos termos de segunda ordem da perturbação temos,

$$\eta^{\alpha\nu}h_{\mu\alpha} = -\beta\eta_{\mu\alpha}h^{\alpha\nu}$$

multiplicando os dois lados desta equação por $\eta_{\tau\nu}$,

$$\begin{aligned}
\eta_{\tau\nu}\eta^{\alpha\nu}h_{\mu\alpha} &= -\beta\eta_{\tau\nu}\eta_{\mu\alpha}h^{\alpha\nu} \\
\delta_\tau^\alpha h_{\mu\alpha} &= -\beta h_{\mu\tau} \\
h_{\mu\tau} &= -\beta h_{\mu\tau} \\
&\Rightarrow \beta = -1. \qquad (34.6)
\end{aligned}$$

Assim,

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}. \tag{34.7}$$

Escolhendo um sistema de coordenadas em que o tensor energia-momento de um fluido perfeito tem apenas a componente T_{00} não nula, temos

$$T_{00} = \rho c^2$$

e seu traço

$$T = -\rho c^2$$

Assim, a Eq. (34.3) resulta em

$$R_{00} = \frac{1}{2}\kappa\rho c^2 \tag{34.8}$$

Porém, como

$$\begin{aligned}
R_{00} = R^{\lambda}{}_{0\lambda 0} &= \frac{\partial \Gamma^{\lambda}{}_{00}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}{}_{0\lambda}}{\partial x^{0}} + \Gamma^{\sigma}{}_{00}\Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\lambda} - \Gamma^{\sigma}{}_{0\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\sigma 0} \\
&= \frac{\partial \Gamma^{\lambda}{}_{00}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}{}_{0\lambda}}{\partial x^{0}} + \mathcal{O}(h^2) \\
&= \frac{\partial \Gamma^{i}{}_{00}}{\partial x^{i}} + \mathcal{O}(h^2)
\end{aligned} \tag{34.9}$$

Pois pela condição de condição de campo fraco, não existe contribuição quando $\lambda = 0$. Assim,

$$\begin{aligned}
R_{00} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(g^{ij}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^j}\right) + \mathcal{O}(h^2) \\
&= -\frac{1}{2}\delta^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^j} + \mathcal{O}(h^2) \\
&= -\frac{1}{2}\nabla^2 g_{00} + \mathcal{O}(h^2)
\end{aligned} \tag{34.10}$$

Com as Eqs. (33.4) e (34.8), podemos escrever a Eq. (34.10). Desprezando os termos de segunda ordem em $h_{\mu\nu}$, temos que

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\nabla^2 g_{00} &= \frac{1}{2}\kappa\rho c^2 \\
\nabla^2\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) &= \kappa\rho c^2 \\
\Rightarrow \nabla^2\phi &= \frac{1}{2}\kappa\rho c^4
\end{aligned}$$

Porém,

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$$

logo,

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} \tag{34.11}$$

Finalmente, podemos escrever a Eq. (34.2) como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{34.12}$$

As Eqs. (34.12), são conhecidas como as *Equações de campo de Einstein*, e oferecem uma descrição superior dos fenômenos gravitacionais, em relação à teoria newtoniana.

35 Ação de Einstein-Hilbert

Por se tratar de uma teoria clássica, é conveniente formular a gravitação de Einstein a partir de uma ação que resulta nas equações de movimento atrações da aplicação do princípio da mínima ação. Tal ação será definida como a soma da ação do setor gravitacional S_g e do setor de matéria S_m.

$$S = S_g + S_m \tag{35.1}$$

O escalar mais simples para definid como densidade de langrangiana do setor gravitacional é o escalar de Ricci, assim, definimos a ação de Einstein-Hilbert como

$$S_g = \frac{1}{2\kappa c} \int d^4x \sqrt{-g} R = \frac{1}{2\kappa c} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \tag{35.2}$$

Pela forma desta ação, é conveniente tomar a variação em termos da métrica inversa, pois como $g^{\mu\sigma} g_{\sigma\nu} = \delta^\mu_\nu$, as variações desta e da métrica estão relacionadas por

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\nu\rho} g^{\nu\sigma} \delta g_{\rho\sigma} \tag{35.3}$$

Assim

$$\delta S_g = \int d^4x \left((\delta \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \sqrt{-g} (\delta g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\delta R_{\mu\nu}) \right) \tag{35.4}$$

Segundo a fórmula de Jacobi para matrizes inversíveis

$$\begin{aligned} \log(\det A) &= tr(\log(A)) \\ \Rightarrow \frac{1}{\det A} \delta \det A &= tr(A^{-1} \delta A) \end{aligned}$$

Para $A = g_{\mu\nu}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} \delta g &= g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \\ \Rightarrow \delta g &= g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{35.5}$$

Onde g é o determinante da métrica. Porém,

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\frac{\delta(-g)}{\sqrt{-g}} = \frac{1}{2}\frac{-\delta g}{\sqrt{-g}} \tag{35.6}$$

Pelas Eqs. (35.3), (35.5) e (35.6),

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\frac{-g}{\sqrt{-g}}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{35.7}$$

Assim, podemos escrever a Eq. (35.4) como,

$$\delta S_g = \int d^4x\sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu} + \int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \tag{35.8}$$

Pela definição do tensor de Ricci

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{\partial\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\rho}}{\partial x^{\nu}} + \delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\rho} + \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\rho} - \delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\rho}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu} \tag{35.9}$$

Os dois primeiros termos à direita da igualdade sugerem uma subtração de derivadas covariantes, assim

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_{\rho}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} - \nabla_{\nu}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\rho} \tag{35.10}$$

Esta equação, facilmente verificável, é conhecida como a *identidade de Palatini*.

Assim,

$$\begin{aligned}\int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= \int d^4x\sqrt{-g}\left(\nabla_{\rho}(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}) - \nabla_{\nu}(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\rho})\right)\\ &= \int d^4x\sqrt{-g}\nabla_{\nu}\left(g^{\mu\rho}\delta\Gamma^{\nu}{}_{\mu\rho} - g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\rho}\right)\end{aligned}$$

Definindo:

$$A^{\nu} \equiv g^{\mu\rho}\delta\Gamma^{\nu}{}_{\mu\rho} - g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\rho}$$

Portanto,

$$\int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \int d^4x\sqrt{-g}\nabla_\nu A^\nu$$

Pelo teorema de Gauss,

$$\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\nabla_\nu A^\nu = \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x\sqrt{|\gamma|}n_\nu A^n = 0 \tag{35.11}$$

Pois as variações são nulas nas bordas da região de integração. Assim,

$$\delta S_g = \frac{1}{2\kappa c}\int d^4x \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu} \tag{35.12}$$

A variação do setor de matéria da ação é definido de tal forma que

$$\delta S_m = -\frac{1}{2c}\int d^4x\sqrt{-g}T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{35.13}$$

E portanto,

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}} \tag{35.14}$$

Finalmente,

$$\delta S = \int d^4x\sqrt{-g}\left\{\frac{1}{2\kappa c}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\right) - \frac{1}{2c}T_{\mu\nu}\right\}\delta g^{\mu\nu} = 0 \tag{35.15}$$

Como assumimos que $g_{\mu\nu}$ é inversível, então $\sqrt{-g} \neq 0$. Para a integral da Eq. (35.15) ser igual a zero, para um $g_{\mu\nu}$ qualquer, o termo entre chaves tem que ser nulo, portanto,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \tag{35.16}$$

Onde $\kappa = {}^{8\pi G}/{}_{c^4}$, para obtermos a expressão correta no limite newtoniano.

Formular a teoria da relatividade geral a partir de uma ação é muito conveniente, pois desta forma o processo de modificação da teoria se torna trivial, sendo muito fácil vislumbrar as infinitas possibilidades de modificações e rapidamente encontrar as equações de campo correspondentes e suas consequências e previsões.